Ueber

die Iapetusverfinsterung durch Saturn und sein Ringsystem

vom Jahre 1889.

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde bei der hohen Philosophischen Facultät der Universität München.

Vorgelegt von

Hugo Buchholz.

Abdruck aus Bd. 137 der Astr. Nachr.

Kiel.
Druck von C. Schaidt.
1895.

Ueber

die Iapetusverfinsterung durch Saturn und sein Ringsystem

vom Jahre 1889.

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde bei der hohen Philosophischen Facultät der Universität München.

Vorgelegt von

Hugo Buchholz.

Abdruck aus Bd. 137 der Astr. Nachr.

Kiel.
Druck von C. Schaidt.
1895.

Die Betrachtung des überaus seltenen Phänomens einer Verfinsterung des Trabanten Iapetus durch Saturn und sein Ringsystem ist für die Frage nach der Structur des Saturnringes von grosser Wichtigkeit, indem sich, wie wir sehen werden, aus der Art und Weise, wie der Trabant bei den verschiedenen Phasen seines Durchganges seine Lichtstärke ändert, Schlüsse über die Beschaffenheit der einzelnen Ringe ziehen lassen.

Es ist diese Frage nach der Beschaffenheit des Saturnringes in neuerer Zeit wieder verschiedentlich behandelt worden, so z. B. von Maxwell, der durch äusserst complicirte potentialtheoretische Untersuchungen darzuthun suchte, dass die Ringe, um dauernd im Gleichgewicht sein zu können, aus mechanischen Gründen aus einer Menge unzusammenhängender Körperchen bestehen müssten, die um den Planeten, nach Maassgabe ihrer Entfernung von demselben, mit verschiedenen Geschwindigkeiten kreisten. Der sich hierfür Interessirende findet die betreffende Abhandlung im zweiten Bande der neuen Mécanique céleste von Tisserand reproducirt. Beiläufig sei aber erwähnt, dass Maxwell, wenn auch in der Grundidee glücklich, dass die Ringe nicht fest seien, sondern aus getrennten Theilchen bestehen, doch in seinen Untersuchungen selbst sich unerlaubte Vernachlässigungen gestattet, wie Prof. Seeliger nachgewiesen hat.*)

Von ganz anderen Gesichtspunkten ausgehend, als Maxwell, hat dann Prof. Seeliger in seiner Abhandlung: »Ueber die Beleuchtung staubförmiger kosmischer Massen speciell des Saturnringes« dieses bedeutungsvolle Problem behandelt. Auf Grund der Principien der Photometrie hat er zum ersten Mal in unzweideutiger Weise dargethan, dass der Saturnring in der That aus materiellen Partikelchen besteht, die im dunkeln Ring weniger dicht angeordnet sind als im hellen, derart, dass der dunkle Ring transparent, der helle dagegen optisch ebenso dicht wie der Centralkörper des Saturn selbst ist.

Für diese Lösung des Problems, welches in der Geschichte der Wissenschaft, wie wir sehen werden, eine so viel umstrittene und schwankende Rolle gespielt hat, von den ersten Zeiten der Entdeckung des Saturnringes durch Huygens bis in die neueste Zeit, erwiesen sich nun aber auch unlängst angestellte Beobachtungen als eine äusserst werthvolle Bestätigung. Prof. Barnard auf dem Lick Observatory, welches die denkbar günstigste Beobachtungslage besitzt, war es allein, dem 1889 am 1. November die Verfolgung des durch Herrn A. Marth vorausgesagten Iapetusdurchganges durch den Schatten Saturns und seines Ringsystems glückte, eine Beobachtung, die, wie wir im Folgenden sehen werden, eben in engster Beziehung zu der zuvor erwähnten Frage nach der Beschaffenheit des Saturnringes steht. Von keiner anderen Sternwarte liegt irgend welches Beobachtungsmaterial über diese Trabantenverfinsterung vor. Das macht die Barnard'schen Beobachtungen um so werthvoller. Ihre hohe Bedeutung für unsere ganze Anschauung vom Saturnsystem in ein helles Licht zu setzen wird das Ziel unserer folgenden Betrachtungen bilden, in denen auf Grund allgemeiner Untersuchungen über Schattenfiguren, speciell über diejenige des Saturnringes, und hierauf mittelst astronomischer Rechnungen eine theoretische Prüfung der Barnard'schen Beobachtungsresultate versucht werden soll, welche diese letzteren als überaus glückliche und werthvolle erweisen wird.

Ehe wir jedoch auf das Problem selbst eingehen, sei noch eine kleine Zwischenbemerkung gestattet, welche die Wichtigkeit unserer Iapetusverfinsterung nur noch nach einer Richtung hin charakterisiren soll.

In der schon citirten Abhandlung »Ueber die Beleuchtung staubförmiger kosmischer Massen speciell des Saturnringes« (S. 31) tritt eine Grösse λ auf, welche in der Theorie Prof. Seeliger's eine Rolle von allgemeinerer Bedeutung spielt und folgenden Werth hat:

$$\lambda = \frac{N}{R} \varrho^2 \pi X$$

Auf die nähere Bedeutung der einzelnen Buchstaben in dieser Relation gehen wir nicht ein, sondern verweisen auf die betreffende Abhandlung. Auch hier ist es wieder nur das seltene Phänomen, wo der Trabant Iapetus durch den Schatten des Saturnsystems hindurchzieht, welches zur Bestimmung von λ in einwurfsfreier Weise verwendet werden kann.†) In der That werden unsere Untersuchungen eine vollständige Werthtabelle für λ ergeben.

Bekanntlich wird nun der ellipsoidische Centralkörper Saturns, dessen Axen etwa im Verhältniss 8 : 9 stehen, umgeben von drei Ringen:

*) S. s. Abh. »Maxwell's und Hirn's Untersuchungen über die Constitution des Saturnringes«. Aus den Sitzungsberichten der math.-physic. Classe der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. XXIV Heft II, 1894, von H. Seeliger.

†) cf. S. 33 u. 34 der Abhandlung: »Ueber die Beleuchtung staubförmiger kosmischer Massen speciell des Saturnringes«.

1) dem dunkeln Ring
2) dem hellen oder innern Ring
3) dem äussern Ring

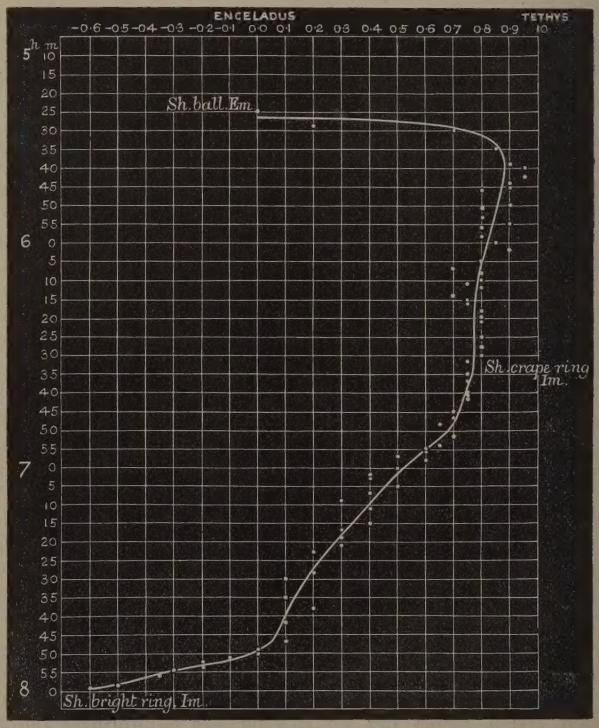
deren genaue Unterscheidung für das Folgende von grosser Wichtigkeit ist, weil gerade daraus, wie Iapetus sich beim Passiren der Schatten der einzelnen Ringe verhält, bedeutungsvolle Schlüsse folgen. Die übrigen Detailverhältnisse des Saturnsystems hingegen kommen für die folgenden Untersuchungen nicht in Betracht. Für die Dimensionen der drei Ringe des Saturn und von Saturn selbst stellt Herr Oudemans die folgenden Werthe zusammen, welche das meiste Vertrauen verdienen dürften:*)

	Fadenmikrometer	Heliometer
Aeusserer Halbmesser des äussern Ringes	20″.18	19″.75
Innerer » » » »	17.61	17.77
Aeusserer » » innern oder hellen Ringes	17.10	16.83
Innerer » » » » » »	13.00	13.74
Aeusserer » » dunkeln Ringes		
Innerer » » » »	10.89	—
Aequatorealhalbmesser Saturns	8.85	8.66
Polarhalbmesser Saturns	8.16	7.69

Zu einer vorläufigen Orientirung wollen wir einen Punkt gleich bemerken. Bei einer Prüfung der Barnard'schen Beobachtungen handelt es sich zunächst, worauf wir später ausführlich zurückkommen werden, um die Gleichungen der zwei Schattenfiguren des Saturnkörpers und seines Ringes. Sobald man diese gewonnen hat, kann berechnet werden, wann Iapetus, falls er z. B. zur Zeit t aus dem Schatten des Centralkörpers herausgetreten, in den Schatten des dunkeln Ringes, und wann er hierauf in denjenigen des hellen oder innern Ringes eintritt. Aus den Resultaten, welche diese Rechnung ergiebt, lassen sich dann Schlüsse ziehen auf die Structur des Saturn, und deren mehr oder minder gute Uebereinstimmung mit den durch Barnard gewonnenen Beobachtungsresultaten bietet eine Controle für die letzteren selbst dar.

Die beim Verlauf der Erscheinung in Betracht kommenden Constellationen und Zahlenverhältnisse hat Herr A. Marth in seiner Vorausberechnung des Phänomens bereits im Detail angegeben.**) Wir referiren dieselben hier deshalb nicht, sondern verweisen auf die genannten Mittheilungen.

Während seiner Beobachtung, über die Herr Barnard selbst ausführlich berichtet hat,†) verfiel er nun auf die glückliche Idee, den Einfluss des Schattens des dunkeln Ringes auf die Sichtbarkeit des Iapetus, nachdem derselbe den Schatten des Hauptkörpers verlassen hatte, zu verfolgen und hierüber Aufzeichnungen zu machen. Zur Constatirung dieses Einflusses stellte er Vergleichungen zwischen der Lichtintensität des Iapetus und der zu ihm am günstigsten stehenden Trabanten, nämlich von Tethys und Enceladus an. Als Vergleichungseinheit denkt sich Barnard den Helligkeitsunterschied zwischen Tethys und Enceladus gewählt und dies Maass in 10 gleiche Theile getheilt. Auf Grund dieser Annahme konnte er dann leicht aus den sämmtlichen während der Sichtbarkeit des Iapetus gemachten Vergleichungen, indem er dieselben als Punkte in der Coordinatenebene repräsentirt nahm, (mit Hülfe von Normalen zu je drei Schätzungen), die Helligkeitscurve construiren, welche der Trabant bei seiner Verfinsterung durch den Schatten des Saturnkörpers und seines dunkeln und hellen Ringes beschrieb, und durch welche man ein vollständiges geometrisches Abbild des ganzen Verlaufes der Erscheinung erhält. Indem er nämlich die Zeit auf der x-Axe, die Helligkeiten hingegen auf der y-Axe aufgetragen denkt, bekommt Barnard die folgende, den besprochenen Einfluss sehr deutlich erkennbar machende Figur,††) wobei die ganzen Angaben nach Sternzeit Mt. Hamilton gemacht sind.



Helligkeitscurve von der Verfinsterung des Iapetus durch den Schatten des Saturnkörpers und seines dunkeln und hellen Ringes 1889 Nov. 1.

*) cf. Kaiser's Sterrenhemel, herausg. von Oudemans, Theil II S. 699-701.
**) cf. Monthly Notices Vol. XLIX S. 427-29.
†) cf. M. N. Vol. L S. 107-9.
††) Entlehnt aus Monthly Notices Vol. L S. 108.

Die Betrachtung dieser Curve zeigt, dass der Satellit um $5^h 24^m.5$ bereits schwach erkennbar aus dem Schatten des Hauptkörpers herausgetreten ist, während er ungefähr um $5^h 35^m$ sein Maximum an Lichtstärke erreicht, worauf eine geringe Abnahme der Helligkeit eintritt. Hierauf bleibt sich dieselbe bis $6^h 35^m$ gleich, oder nimmt doch nur unmerklich ab, um jedoch dann, von $6^h 35^m$ ab, wo Iapetus sich den Blicken des Beobachters rasch zu entziehen beginnt, ausgesprochen abzunehmen, wie aus dem scharfen Sinken der Curve hervorgeht. Dieselbe giebt mithin ein deutliches Bild davon, wie der Halbschatten des dunkeln Ringes die Sichtbarkeit des Iapetus beeinflusste. Denn dieser Schatten verursacht eine gleichmässige Abnahme des Lichtes auf dem Satelliten von $6^h 35^m$ an bis $7^h 45^m$, zu welcher Zeit Iapetus in den Schatten des innern (hellen) Ringes eintritt, in welchem er schliesslich ganz verschwindet, da er, wie die Beobachtung angiebt, um $7^h 59^m$ zuletzt gesehen wurde.

Diese Beobachtungen Barnard's und die aus ihnen sich unmittelbar ergebenden Folgerungen beantworten nun aber in unzweideutiger Weise die alte Frage nach der Beschaffenheit des Ringes des Planeten Saturn. Denn nachdem Iapetus durch das Sonnenlicht, welches zwischen dem Hauptkörper und den Ringen durchscheint, hindurchgegangen war, tritt, während er tiefer und tiefer in den Schatten des dunkeln Ringes hineinzieht, eine immer ausgesprochenere Absorption des Lichts auf dem Satelliten ein, bis derselbe schliesslich ganz in dem Schatten des hellen Ringes verschwindet. Hieraus folgt aber offenbar thatsächlich, dass der dunkle Ring transparent ist, eben da das Sonnenlicht durch ihn hindurchscheint. Die Theilchen, aus denen er besteht, scheiden eine beträchtliche Menge Sonnenlicht ab und hängen um so mehr zusammen, d. h. der dunkle Ring wird um so dichter, je mehr er sich dem hellen Ring nähert. Die Beobachtungen über das Verschwinden des Iapetus in dem Schatten des hellen Ringes hingegen zeigen, dass der letztere optisch vollständig ebenso dicht ist, wie der Hauptkörper des Saturn selbst.

Wie mannigfachen Schwankungen die Ansichten der Astronomen und Mathematiker über die Beschaffenheit des Saturnringes im Laufe der Zeit unterworfen gewesen sind, zeigt ein flüchtiger Blick auf die historische Entwicklung. Sein Entdecker Huygens vermochte sich noch keine feste Ansicht in dieser Frage zu bilden. Der grosse Mathematiker Cassini nahm den ganzen Ring aus einer dichten Dunstschicht gebildet an. Lassell, indem wir der Kürze halber einen grossen Zeitraum überspringen, kam im Jahre 1852 der Wahrheit bereits viel näher; denn er nahm den dunkeln Ring schon als durchsichtig an, weil die Projection desselben auf die Saturnkugel nicht vollkommen schwarz erscheine. Doch wurde diese Behauptung weder weiter von ihm begründet, noch auch in ihrer Tragweite verfolgt. Und ausserdem hält Lassell den ganzen Ring noch für flüssig und homogen. Der aus den Beobachtungen Barnard's sich ergebende Schluss, dass der Saturnring aus einer Unzahl discreter Theilchen besteht, wie wir ihn unfehlbar zu ziehen uns genöthigt sehen, hat hingegen, wie schon zu Anfang erwähnt, auch das noch für sich, dass er durch die aus der Saturntheorie Prof. Seeliger's sich ergebenden theoretischen Resultate, die übrigens mit diesen Beobachtungen nicht weiter zusammenhängen, bestätigt wird.

Trotzdem müssen wir die Barnard'schen Beobachtungen als solche nun noch theoretisch prüfen, um ihre Richtigkeit im Einzelnen ausser Zweifel zu setzen, eine Aufgabe, die, wie bereits angedeutet, zu Schattenuntersuchungen Anlass giebt, die ziemlich complicirter Natur sind, und die schon um ihres theoretischen Interesses willen anzustellen, eine lohnende Aufgabe sein würde. Zunächst ist klar, dass wenn man die Sonne als leuchtenden materiellen Punkt betrachten würde, dass dann die Schattenflächen des Saturnellipsoides und seines Ringes sofort gegeben wären und in gewöhnlichen Kegeln zweiter Ordnung beständen. Kann man nun auch bei der enormen Entfernung des Saturn von der Sonne diese letztere für das System »Sonne-Saturn« sehr gut als einen materiellen Punkt betrachten, so wird doch eine genauere Prüfung der Barnard'schen Ringschattenbeobachtungen die Kenntniss der durch eine kugelförmige Sonne hervorgebrachten Saturnringschattenfläche äusserst erwünscht erscheinen lassen, während wir uns beim Ellipsoidschattenproblem, welches nur zur Correction der von Struve angegebenen mittleren Anomalie des Iapetus dient, sehr gut mit der Hypothese einer punktförmigen Sonne begnügen können.

Zur Lösung des Ringschattenproblems liegt es nahe, eine von Laplace erfundene, ganz allgemeine Methode anzuwenden zu versuchen, welche dieser grosse Theoretiker aufgestellt hat, um die Gleichungen völlig beliebiger Schattenfiguren aufzufinden. Beim Problem der Jupiterstrabantenverfinsterungen stiess er auf die Frage: »die Gleichung für die Schattenfigur eines beliebigen dunkeln Körpers, der von einem leuchtenden erhellt wird, zu finden.«*) Die Laplace'sche Theorie gestattet jedoch nur in ganz besonderen Fällen, bei glücklich angewandten Kunstgriffen und unter günstigen möglichen Vernachlässigungen und Voraussetzungen die Lösung verwickelterer Schattenaufgaben. Wir geben sie hier ihrem Inhalt nach nicht wieder, sondern verweisen auf die citirte Stelle der Mécanique céleste, behalten aber eine Besprechung derselben, sowie die Angabe einer anderen Methode, mittelst deren man jedes beliebige Schattenproblem wirklich immer und auch völlig strenge zu lösen im Stande ist, einer demnächst erscheinenden Abhandlung vor.

Seine allgemeine Schattenmethode hat nun Laplace zur Lösung zweier Aufgaben bereits wirklich angewandt, nämlich erstens um die Kern- und Halbschattengleichung für eine Kugel, zweitens um dieselbe für ein Ellipsoid zu finden, unter Voraussetzung einer kugelförmigen Sonne. Doch hat Laplace, der die Verhältnisse des Systems »Sonne-Jupiter« untersuchte, das Ellipsoidschattenproblem unter der speciellen Voraussetzung behandelt, dass die Sonne in die Aequatorebene des Jupiter fällt. Beim Jupiter, wo der Elevationswinkel der Sonne über der Aequatorebene nur 1° beträgt, bedingt das wohl keinen wesentlichen Fehler. Nicht so beim System »Sonne-Saturn«, wo der Elevationswinkel der Sonne über der Ringebene ca. $-11° 10'.1$ beträgt. Wir müssen daher im Folgenden von einer anderen

*) cf. Mécanique céleste Bd. IV Cap. 8.

Form der Oberflächengleichung des Ellipsoides ausgehen als Laplace, indem wir diesen Elevationswinkel α, sowie ferner die Neigung der Ekliptik gegen den Saturnäquator oder die Ringebene, welche so gut wie zusammenfallen, in Betracht ziehen, die ca. 28° beträgt.

Seien also XYZ die Coordinaten eines Punktes der Saturnoberfläche, bezogen auf das Saturncentrum, und zwar sei die Ringebene die xy-Ebene, so lautet die Gleichung des Saturnellipsoides bezüzlich dieses Systems allgemein:

$$X^2 + Y^2 + (1 + \varrho)^2 \cdot (Z^2 - R'^2) = 0$$

wobei

$$\varrho = \frac{a - R'}{R'}$$

Nun verlegen wir den Ursprung unseres Coordinatensystems in die Sonne und zwar sei die xy-Ebene dieses neuen Systems der Ringebene parallel, und seine x-Axe sei die Projection der Linie: »Sonne-Saturn« auf diese xy-Ebene. Bezeichnen wir dann mit $(-\alpha)$ den Elevationswinkel des Saturn, so sind die Coordinaten des Saturncentrums, bezogen auf dieses neue System:

$$D \cos \alpha$$
$$0$$
$$- D \sin \alpha$$

wobei D die Entfernung $\odot - \mathfrak{h}$ ist. Die Coordinaten eines Oberflächenpunktes des Saturn bezüglich dieses Systems seien $X'\ Y'\ Z'$. Dann ist:

$$X = X' - D \cos \alpha$$
$$Y = Y'$$
$$Z = Z' + D \sin \alpha$$

Daher müssen wir von der folgenden Form der Oberflächengleichung des Ellipsoids ausgehen:

$$(X' - D \cos \alpha)^2 + Y'^2 + (1 + \varrho)^2 \cdot ((Z' + D \sin \alpha)^2 - R'^2) = 0$$

oder, wenn $\quad D \cos \alpha = A \qquad D \sin \alpha = C$

auch:

$$(X' - A)^2 + Y'^2 + (1 + \varrho^2)\,((Z' + C)^2 - R'^2) = 0 \tag{1}$$

Versucht man nun aber diese Gleichung im Sinne der allgemeinen Laplace'schen Theorie unter Voraussetzung einer kugelförmigen Sonne zu behandeln, so treten grosse Schwierigkeiten ein, da man hier den Kunstgriff nicht benutzen kann, durch den Laplace allein die Auflösung einer höheren Gleichung in seinem Problem umgangen und dadurch die Lösung ermöglicht hat. Wie schon erwähnt, spielt aber die strenge Lösung des Ellipsoidschattenproblems für eine Prüfung der Barnard'schen Beobachtungen keine Rolle, da sie nur zur Correction der mittleren Anomalie des Iapetus dient. Wir setzen daher hier die Sonne einfach als Punkt voraus. Dann hat die Gleichung des Tangentenkegels, den man von einem beliebigen Punkt $x_0\ y_0\ z_0\ p_0$ als Spitze an eine beliebige Oberfläche zweiter Ordnung $f = 0$ legt, die folgende Form:

$$4 f(x\ y\ z\ p) \cdot f(x_0\ y_0\ z_0\ p_0) = (x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0) + p f'(p_0))^2$$

wobei $x_0\ y_0\ z_0\ p_0$ die Coordinaten der Kegelspitze, in unserem Falle also des Sonnenpunktes sind. Ersetzen wir in dieser Relation f durch unsere Ellipsoidgleichung (1), so folgt als Gleichung der Schattenfläche:

$$0 = (1 + \varrho)^2 \cdot (A Z' + C X')^2 - R'^2 \cdot (1 + \varrho)^2 \cdot (X'^2 + (1 + \varrho)^2 Z'^2) + Y'^2 \cdot (A^2 + (1 + \varrho)^2 \cdot (C^2 - R'^2)) \tag{2}$$

und das ist in der That die Gleichung eines gewöhnlichen Kegels zweiter Ordnung. Wir werden später diese Gleichung für die numerische Rechnung noch transformiren, wodurch sie zugleich in einem neuen Sinne definirt erscheint. Vorläufig indess unterbrechen wir nicht die Entwicklung der allgemeinen Grundlagen, die für eine Prüfung der Barnard'schen Beobachtungen nothwendig sind. Zu ihnen gehört, wie gesagt, in erster Linie die Kenntniss der Schattengleichung des Saturnringes. Diese Gleichung aber kann man in der That mittelst der Laplace'schen Methode für eine kugelförmige Sonne, wenn auch nicht ohne analytische Schwierigkeiten, astronomisch genügend strenge aufstellen. Wir deuten den Gang dieser Lösung hier an.

Da die Beobachtungen die scheinbare Dicke des Saturnringes als eine äusserst minimale ergeben, so können wir im Folgenden glücklicher Weise für seine Gleichung diejenige eines gewöhnlichen Kreises setzen. Um jetzt die Laplace'sche Methode auf das Kreisschattenproblem anwenden zu können, haben wir für den Kreis, indem wir den Ursprung des Coordinatensystems in das Centrum des Saturn verlegen, auszugehen von den folgenden Gleichungen:

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{3}$$
$$z = 0$$
$$\mathrm{d}z = 0$$

Die allgemeine Tangentialebenengleichung der Laplace'schen Theorie wird daher:

$$x = a y + c$$

woraus:

$$\mathrm{d}x - a\,\mathrm{d}y = 0 \tag{4}$$

Ferner folgt aus (3):

$$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0 \tag{5}$$

Die Gleichungen (4) und (5) liefern jetzt zusammen:

$$a x \cdot \mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}x = 0$$

d. h.

$$a x = -y$$

Somit ergiebt sich für:

$$x = \frac{c}{1 + a^2}$$

$$y = -\frac{a c}{1 + a^2}$$

folglich: $$x^2 + y^2 = r^2 = \frac{c^2(1+a^2)}{(1+a^2)^2}$$

also: $$c^2 = r^2(1+a^2) \qquad (6)$$

d. i. die Bedingungsgleichung in a und c für den Saturnring.

Um diejenige für die Sonne in unserem Falle zu finden, müssen wir von der allgemeinen Kugelgleichung ausgehen, in der also A, B, C die Sonnenmittelpunktscoordinaten bezüglich des Saturncentrums bezeichnen:

$$(x-A)^2 + (y-B)^2 + (z-C)^2 = \varrho^2 \qquad (7)$$

Nach der Laplace'schen Methode folgt jetzt:

$$a^2(x-A)^2 = (y-B)^2$$
$$b^2(x-A)^2 = (z-C)^2$$

also durch Einsetzen in (7):

$$(x-A)^2 \cdot [1 + a^2 + b^2] = \varrho^2 \qquad (8)$$

Ferner: $$a y = a B - a^2(x-A)$$
$$b z = b C - b^2(x-A)$$

Die allgemeine Tangentialebenengleichung

$$x - A = a y + b z + c - A$$

wird mithin:

$$(x-A)[1 + a^2 + b^2] = -(A - a B - b C - c)$$

also:

$$(x-A)^2[1 + a^2 + b^2]^2 = (A - a B - b C - c)^2 \qquad (9)$$

Die Relationen (8) und (9) ergeben jetzt die zweite nothwendige Bedingungsgleichung in a, b und c:

$$\varrho^2(1 + a^2 + b^2) = (A - a B - b C - c)^2 \qquad (10)$$

Diese Gleichung kann man aber auch wie folgt als quadratische Gleichung in b schreiben:

$$b^2 - \frac{2C(A - aB - c)}{C^2 - \varrho^2} b + \frac{(A - aB - c)^2 - \varrho^2(1+a^2)}{C^2 - \varrho^2} = 0$$

woraus für b der Werth resultirt:

$$b = \frac{C(A - aB - c) \pm \sqrt{C^2(A - aB - c)^2 - ((A - aB - c)^2 + \varrho^2(1+a^2))(C^2 - \varrho^2)}}{C^2 - \varrho^2} \qquad (11)$$

Die Lage des Coordinatensystems haben wir nun bisher ganz willkürlich gelassen. Wir können dasselbe jetzt so gedreht denken, dass die xz-Ebene durch den Mittelpunkt der Sonne geht. In diesem Fall wird $B = 0$ und die Grösse unter dem Wurzelzeichen schreibt sich einfacher:

$$C^2(A-c)^2 - (C^2 - \varrho^2)((A-c)^2 - \varrho^2(1+a^2)) = \varrho^2((A-c)^2 + (1+a^2)(C^2 - \varrho^2))$$

Gleichung (11) wird mithin, da $$c = r\sqrt{1+a^2}$$

einfacher: $$b(C^2 - \varrho^2) = C(A - r\sqrt{1+a^2}) \pm \varrho\sqrt{(A - r\sqrt{1+a^2})^2 + (C^2 - \varrho^2)(1+a^2)}$$

Zur Abkürzung setzen wir nun vorläufig:

$$(A - r\sqrt{1+a^2})^2 + (C^2 - \varrho^2)(1+a^2) = M$$

so dass also:

$$b(C^2 - \varrho^2) = C(A - r\sqrt{1+a^2}) \pm \varrho\sqrt{M} \qquad (12)$$

Allgemein ist aber nach Laplace:

$$x = a y + b z + c$$
$$0 = y + z\frac{db}{da} + \frac{dc}{da}$$

Somit haben wir jetzt

$$\frac{db}{da} \text{ und } \frac{dc}{da}$$

wirklich auszurechnen. Aus Gleichung (6) ergiebt sich unmittelbar:

$$\frac{dc}{da} = \frac{ra}{\sqrt{1+a^2}}$$

Der andere Differentialquotient aber wird nach (12):

$$\frac{db}{da}(C^2 - \varrho^2) = -\frac{Cra}{\sqrt{1+a^2}} \pm \frac{\varrho}{\sqrt{M}} \cdot \left[a(C^2 + r^2 - \varrho^2) - \frac{raA}{\sqrt{1+a^2}}\right]$$

Die Schattenfläche, gegeben durch den Parameter a, ist mithin:

$$\left.\begin{aligned} x &= a y + \frac{(A - r\sqrt{1+a^2})C}{C^2 - \varrho^2} \cdot z \pm \frac{\varrho\sqrt{M}}{C^2 - \varrho^2} \cdot z + r\sqrt{1+a^2} \\ 0 &= y + \frac{raC}{(C^2 - \varrho^2)\sqrt{1+a^2}} z \pm \frac{\varrho}{\sqrt{M}} \cdot \left[a(C^2 + r^2 - \varrho^2) - \frac{raA}{\sqrt{1+a^2}}\right] \frac{z}{C^2 - \varrho^2} + \frac{ra}{\sqrt{1+a^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

d. h. aus diesen zwei Gleichungen hätte man a zu eliminiren, um als Resultante die Schattenfläche, dargestellt durch eine einzige Gleichung, wirklich zu erhalten. Diese Elimination ist aber äusserst verwickelt. Zur Prüfung der Barnard'schen Beobachtungen ist diese strenge Ableitung der Gleichung der Ringschattenfläche indess glücklicher Weise überhaupt nicht

erforderlich. Vielmehr kann man beim System »Sonne-Saturn« mit vollständiger Sicherheit eine ganze Reihe von Vernachlässigungen einführen.

Zunächst ist nämlich beim Saturnring C sehr gross gegen ϱ, da die Sonne ca. 11° 10′ über der Ringebene steht. Und folglich ist $\frac{\varrho}{C}$ sehr klein, etwa $^1/_{360}$, also sind höhere Potenzen von $\frac{\varrho}{C}$ zu vernachlässigen. Setzen wir mithin $C^2 - \varrho^2$ gleich C^2, so geht der Werth von M über in den folgenden:

$$M = A^2 + (1 + a^2)\, C^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{r}{C}\right)^2 - 2\,\frac{A}{C}\cdot\frac{r}{C}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right]$$

Die Grösse $\frac{A}{C}$ ist nun eine Zahl, nämlich die Cotangente des Elevationswinkels der Sonne und beträgt circa -5. Das Verhältniss ferner des Ringradius r zur Sonnenmittelpunktscoordinate C ist bei der enormen Entfernung $\odot - \mathrm{h}$ ebenfalls nur ein minimales. Daher können wir auch die zweite Potenz von $\frac{r}{C}$ und das Product $\frac{r}{C}\cdot\frac{A}{C}$ vollständig genügend sicher vernachlässigen. Das dritte und vierte Klammerglied in letzterer Gleichung fällt somit fort und M nimmt die einfache Form an:

$$M = A^2 + (1 + a^2)\, C^2$$

Somit haben wir, um die Gleichung für die Schattenfläche des Saturnringes zu erhalten, nur die Elimination von a aus folgendem, weit einfacheren Gleichungssystem auszuführen, welches in Folge unserer Annahme an die Stelle von System (13) tritt:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,y + \frac{A}{C}\,z + r\sqrt{1+a^2}\left(\frac{C-z}{C}\right) \pm \frac{\varrho}{C}\,z\sqrt{\left(\frac{A}{C}\right)^2 + (1+a^2)} \\ 0 &= y + \frac{r\,a}{\sqrt{1+a^2}}\left(\frac{C-z}{C}\right) \pm \frac{\varrho}{C}\cdot\frac{\varrho\,z\,a}{\sqrt{\left(\frac{A}{C}\right)^2 + (1+a^2)}} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Um aus diesem System durch Elimination von a die Schattenfläche in Form einer einzigen Gleichung zu erhalten, müssen wir im Ganzen zweimal quadriren. Dabei setzen wir bis auf Weiteres zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \frac{\varrho}{C} &= \lambda \\ x - \frac{A}{C}\,z &= \xi \\ \frac{C-z}{C} &= \gamma \\ \frac{A}{C} &= \mu \end{aligned}$$

Dann wird das System (14):

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a\,y + r\,\gamma\sqrt{1+a^2} \pm \lambda\,z\sqrt{\mu^2+1+a^2} \\ 0 &= y + r\,\gamma\,\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \pm \lambda\,z\,\frac{a}{\sqrt{\mu^2+1+a^2}} \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Jetzt haben wir zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten, wo wir

$$\lambda = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

setzen, d. h. die Sonne als leuchtenden Punkt betrachten, sieht man unschwer, dass die Schattenfläche des Kreises in einem gewöhnlichen Kegel zweiter Ordnung besteht. Denn durch Elimination von a folgt unter dieser Voraussetzung, indem wir die erste Gleichung in (15) mit $-\frac{a}{1+a^2}$ multipliciren und zur zweiten addiren:

$$-\frac{a\,\xi}{1+a^2} = y - \frac{a^2\,y}{1+a^2}$$

woraus:

$$a = -\frac{y}{\xi}$$

Durch Einsetzen dieses Werthes in die erste Gleichung von (15) ergiebt sich bei unserer jetzigen Annahme über λ:

$$\xi = -\frac{y^2}{\xi} + r\,\gamma\sqrt{1+\frac{y^2}{\xi^2}}$$

woraus:

$$\xi^2 + y^2 = r^2\,\gamma^2 \qquad (16)$$

d. i. aber wirklich die Gleichung eines gewöhnlichen Kegels zweiter Ordnung, die dem System (15), in ihm $\lambda = 0$ gesetzt, aequivalent ist.

Setzen wir aber den zweiten möglichen Fall:

$$\lambda \text{ nicht gleich } 0 \qquad (\mathrm{II})$$

und dieser ist der für unser Problem in Betracht kommende, so repräsentiren, wie jetzt ersichtlich, die beiden Glieder:

$$\pm\,\lambda\,z\sqrt{\mu^2+1+a^2}$$
$$\pm\,\lambda\,z\,\frac{a}{\sqrt{\mu^2+1+a^2}}$$

im System (15) die Correctionen, welche man den zwei Gleichungen (15) des Kegels hinzufügen muss, um die Gleichung derjenigen Schattenfläche zu erhalten, die entsteht, wenn nicht eine punktförmige, sondern wenn eine kugelförmige Sonne den Saturnring beleuchtet. Und da $\lambda = \frac{\varrho}{C}$ nur eine sehr kleine Grösse im System $\odot - \mathrm{h}$ ist, so wird offenbar die wahre Schattenfläche, die eine kugelförmige Sonne hervorruft, wie sie durch System (15) gegeben ist, auch nur wenig abweichen von der durch einen leuchtenden Punkt entstehenden, wie sie Gleichung (16) darstellt.

Für diesen zweiten Fall, dass λ nicht o ist, haben wir nun also die Elimination von a noch auszuführen. Dieselbe ist etwas schwierig und nur mittelst Anwendung von Kunstgriffen möglich. Wir verfahren wie folgt. Zuerst quadriren wir die erste Gleichung im System (15), hierauf multipliciren wir die zweite Gleichung desselben Systems mit $\sqrt{1+a^2}$, quadriren sie danach ebenfalls, und subtrahiren die so entstehende Relation von der erst erhaltenen. Dann folgt, zunächst die erste Gleichung quadrirt:

$$\xi^2 = a^2 y^2 + r^2 \gamma^2 (1+a^2) + \lambda^2 z^2 (\mu^2 + 1 + a^2) + 2 a y r \gamma \sqrt{1+a^2} \pm$$
$$\pm 2 a y \lambda z \sqrt{\mu^2+1+a^2} \pm 2 r \gamma \lambda z \sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{\mu^2+1+a^2}$$

Das vierte, fünfte, sechste Glied rechts mit μ^2+1+a^2, das achte und neunte mit $\sqrt{\mu^2+1+a^2}$ bezgl. im Zähler und Nenner multiplicirt, folgt:

$$\xi^2 = a^2 y^2 + r^2 \gamma^2 + r^2 \gamma^2 a^2 + \lambda^2 z^2 \mu^2 \frac{\mu^2+1+a^2}{\mu^2+1+a^2} + \lambda^2 z^2 \frac{\mu^2+1+a^2}{\mu^2+1+a^2} + \lambda^2 z^2 a^2 \frac{\mu^2+1+a^2}{\mu^2+1+a^2} +$$
$$+ 2 a y r \gamma \sqrt{1+a^2} \pm \frac{2 a y \lambda z (\mu^2+1+a^2)}{\sqrt{\mu^2+1+a^2}} \pm 2 r \gamma \lambda z \frac{\sqrt{1+v^2}(\mu^2+1+a^2)}{\sqrt{\mu^2+1+a^2}}$$

Führen wir jetzt die Multiplication wirklich aus und ziehen von der so entstehenden 17gliedrigen Gleichung die Gleichung:

$$o = y^2 + y^2 a^2 + r^2 \gamma^2 a^2 + \frac{\lambda^2 z^2 a^2}{\mu^2+1+a^2} + \frac{\lambda^2 z^2 a^4}{\mu^2+1+a^2} + 2 y r \gamma a \sqrt{1+a^2}$$
$$\pm \frac{2 y \lambda z a}{\sqrt{\mu^2+1+a^2}} \pm \frac{2 y \lambda z a^3}{\sqrt{\mu^2+1+a^2}} \pm \frac{2 r \gamma a^2 \lambda z \sqrt{1+a^2}}{\sqrt{\mu^2+1+a^2}} \qquad (17)$$

ab, die man durch Multiplication der zweiten Gleichung von System (15) mit $\sqrt{1+a^2}$ und Quadriren bekommt, so heben sich im Ganzen vierzehn Glieder weg und man erhält, wenn man gehörig zusammenzieht:

$$\xi^2 + y^2 - r^2 \gamma^2 = \pm 2 \lambda z \frac{y a \mu^2 + r \gamma (\mu^2+1) \sqrt{1+a^2}}{\sqrt{\mu^2+1+a^2}} + \lambda^2 z^2 \frac{\mu^4 + (2\mu^2+1)(1+a^2)}{\mu^2+1+a^2} \qquad (18)$$

Bei der weiteren Rechnung muss man Unendlichkeiten vermeiden. Dazu setzen wir:

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \sigma$$

also:

$$a = \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}$$

Es wird dann:

$$\sqrt{1+a^2+\mu^2} = \frac{\sqrt{\mu^2+1-\mu^2\sigma^2}}{\sqrt{1-\sigma^2}}$$

und Gleichung (17) reducirt sich schliesslich auf folgende Form:

$$\xi^2 + y^2 - r^2 \gamma^2 = \pm 2 \lambda z \frac{y \sigma \mu^2 + r \gamma (\mu^2+1)}{\sqrt{\mu^2+1-\mu^2\sigma^2}} + \lambda^2 z^2 \frac{(\mu^2+1)^2 - \mu^4 \sigma^2}{\mu^2+1-\mu^2\sigma^2} \qquad (19)$$

In erster Näherung darf nun vollständig genügend genau gesetzt werden:

$$\sigma = -\frac{y}{r\gamma}$$

Dass dem wirklich so ist, werden wir sogleich nachweisen. Führen wir vorläufig diese Annahme wirklich ein, so wird das erste Glied der rechten Seite von Gleichung (19):

$$\pm 2 \lambda z \frac{\frac{-y^2\mu^2}{r\gamma} + r\gamma(\mu^2+1)}{\sqrt{1+\mu^2-\frac{\mu^2 y^2}{r^2\gamma^2}}} = \pm 2 \lambda z \sqrt{\mu^2(r^2\gamma^2 - y^2) + r^2\gamma^2}$$

Das zweite Glied aber fällt unserer Voraussetzung gemäss ganz weg und es ergiebt sich genügend genau:

$$\xi^2 + y^2 - r^2\gamma^2 = \pm 2 \lambda z \sqrt{\mu^2(r^2\gamma^2 - y^2) + r^2\gamma^2} \qquad (20)$$

Dass nun aber diese Näherung thatsächlich genügt, d. h. dass factisch gesetzt werden darf:

$$\sigma = -\frac{y}{r\gamma}$$

ist leicht zu sehen. Denn σ ist ja bestimmt durch die zweite Gleichung des Systems (15):

$$o = y + r\gamma \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \pm \lambda z \frac{a}{\sqrt{\mu^2+1+a^2}}$$

oder:

$$\sigma = -\frac{y}{r\gamma} \mp \lambda z \frac{\sigma}{\sqrt{\mu^2+1-\mu^2\sigma^2}} \qquad (21)$$

Aus dieser Gleichung, welche σ direct nicht liefert, könnte man doch σ mittelst der Lagrange'schen Umkehrungsformel in bekannter Weise finden. Es erscheint, wenn man diesen Weg einschlägt, σ dargestellt durch eine Potenzreihe in λ, und da sich als erstes Glied dieser Reihe gerade $-\frac{y}{r\gamma}$ ergiebt, so ersieht man auf diesem Wege wirklich, dass $\sigma = -\frac{y}{r\gamma}$ eine Näherung ist. Doch können wir diese ganze Entwicklung durch folgende einfache Bemerkung ersetzen, durch die wir zu demselben Resultat gelangen. Da $\sigma < 1$, also stets $\mu^2 + 1 - \mu^2\sigma^2 > 1$ ist, so vernachlässigen wir offenbar, indem λ klein von erster Ordnung ist, nur Glieder zweiter Ordnung, wenn wir in der Definitionsgleichung (21) für σ das Glied:

$$\lambda z \frac{\sigma}{\sqrt{\mu^2 + 1 - \mu^2\sigma^2}}$$

fortlassen. Diese Vernachlässigung ist aber gerade bei dem System $\odot - \mathfrak{h}$ gestattet. Die Gleichung der Schattenfläche des von der kugelförmigen Sonne beleuchteten Saturnringes ist mithin wirklich vollständig genügend genau gegeben durch die Relation:

$$\xi^2 + y^2 - r^2\gamma^2 = \pm 2\lambda z \sqrt{\mu^2(r^2\gamma^2 - y^2) + r^2\gamma^2}$$

oder, wenn wir die wirklichen Werthe der zur Abkürzung der Rechnung eingeführten Hülfsgrössen wieder substituiren:

$$\left(x - \frac{A}{C}z\right)^2 + y^2 - r^2\left(\frac{C-z}{C}\right)^2 = \pm 2\lambda z \sqrt{\left(\frac{A}{C}\right)^2 \cdot \left[r^2\left(\frac{C-z}{C}\right)^2 - y^2\right] + r^2\left(\frac{C-z}{C}\right)^2} \qquad (22)$$

Und zwar repräsentirt diese Relation (22) die Schattenfläche des Saturnringes bezogen auf ein Coordinatensystem, dessen Ursprung im Centrum des Saturn liegt, dessen xz-Ebene durch den Mittelpunkt der Sonne geht und dessen xy-Ebene mit der Ringebene Saturns zusammenfällt. Ein analoges Coordinatensystem haben wir aber auch unserer Ellipsoidschattengleichung zu Grunde gelegt, was einen wesentlichen Vortheil für die ganzen folgenden Rechnungen bildet.

Die ganze hier gegebene Entwicklung hat also für das System $\odot - \mathfrak{h}$ deshalb vollkommene Gültigkeit, weil beim Saturn der Elevationswinkel der Sonne über der Ringebene $\alpha = -11^\circ 10'.1$ beträgt und deshalb λ wirklich einen kleinen Werth hat. Stände hingegen die Sonne in der Ringebene, so wäre λ gross und die vorhergehenden Entwicklungen würden dann nicht mehr gelten.

Wir gehen nun dazu über, die Gleichungen der Schattenfläche des Saturnellipsoids und seines Ringes zur Discussion der Barnard'schen Beobachtungen heranzuziehen. Zu diesem Zweck beziehen wir vor der Hand alle auftretenden Constanten auf die mittlere Ekliptik 1889 Nov. 1.0, um dann von da aus auf dasjenige Coordinatensystem überzugehen, welches wir unseren Schattengleichungen zu Grunde gelegt haben. Als Grundlage wählen wir den Nautical Almanac, weil sich einerseits die Struve'schen Elementenangaben über den Iapetus*) auf mittlere Greenwicher Zeit beziehen, und weil andererseits im N. A. die heliocentrischen Saturncoordinaten von Tag zu Tag gegeben sind. Seit der Struve'schen Epoche 1885 Sept. 1.0 M. Z. Gr. sind nun bis zu unserer Epoche 1889 Nov. 1.0 gerade 4.1670 Jahre verflossen. Reducirt man jetzt, unter Zugrundelegung der von Struve gegebenen Formeln für die saecularen und die periodischen Störungen die Iapetuselemente auf 1889 Nov. 1.0, so erhält man folgendes Elementensystem:

$$\begin{aligned} E &= 142^\circ\,13'.1 \\ P &= 353\;\;49.4 \\ n &= 142\;\;\;5.4 \\ i &= 18\;\;28.7 \\ e &= 0.02858 \\ \lambda &= 4^\circ.537997 \end{aligned}$$

Und wenn μ die mittlere Anomalie für 1889 Nov. 1.0 bezeichnet:

$$\mu = 148^\circ\,23'.7$$

$$\begin{aligned} \lg e' &= 1.99233 \\ \lg \lambda' &= 2.43501 \end{aligned}$$

Dabei ergeben sich für die periodischen Störungen die folgenden Werthe:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P &= -43'.5 \\ \mathrm{d}n &= -\;\;0.8 \\ \mathrm{d}e &= +\;0.00016 \\ \mathrm{d}i &= +\;\;2.7 \\ \mathrm{d}E &= -\;\;3.2 \end{aligned}$$

Und es bedeutet, unter Beibehaltung der Bessel'schen Bezeichnungen:

E die mittlere Länge der Epoche
P die Länge des Perisaturniums
n die Länge des Knotens } bez. der Ekliptik
i die Neigung }
e die Excentricität
λ die mittlere tägliche Bewegung.

Ferner entnehmen wir dem N. A. für die heliocentrischen Coordinaten des Saturn, bezogen auf unser augenblicklich stattfindendes mittleres Aequinoctium:

1889	Helioc. Länge L	Helioc. Breite B	log rad. vect. in Saturnbahnradien
Nov. 1.0	146° 35'.7	+1° 23'.3	9.98548
2.0	146 37.9	+1 23.4	9.98549

*) cf. die Struve'sche Abhandlung: »Beobachtungen der Saturntrabanten«. Erste Abtheilung. Beobachtungen am 15z. Refractor.

Die Aenderungen dieser Coordinaten können als der Zeit proportional angenommen werden. Als Längeneinheit dient die mittlere grosse Halbaxe der Saturnbahn:

$$a' = 9.53885\ [0.97949]$$ Erdbahnhalbmesser.

Mit Struve nehmen wir ferner die mittlere Elongation Δ des Iapetus zu 514″589 an oder in Radiustheilen:

$$\Delta = 0.0024948\ [7.39703]$$

Weiter entnehmen wir dem Berliner Jahrbuch die Ringelemente, bezogen auf die augenblicklich stattfindende mittlere Ekliptik:

$$\varphi = 168°\ 2'.7 \text{ (Knoten)}$$
$$\vartheta = 28\ 10.2 \text{ (Neigung)}$$

Im Folgenden identificiren wir Ringebene und Saturnäquator und stellen uns auf den Saturn.

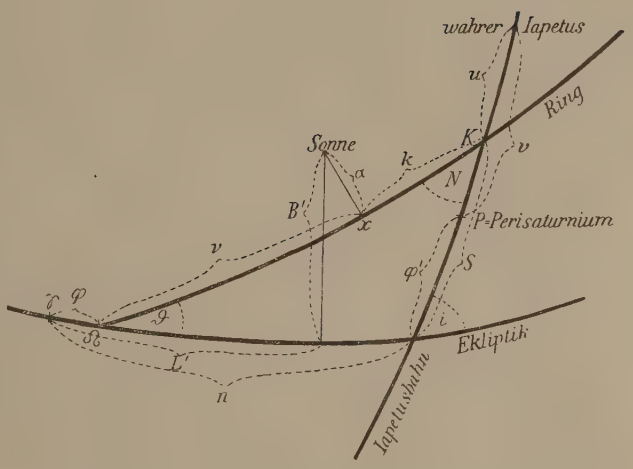
Ferner seien L', B', D die Länge, Breite und Entfernung der Sonne vom Saturncentrum aus gesehen. Als Längeneinheit dient wieder die mittlere grosse Halbaxe der Saturnbahn. Dann ist:

$$L' = L - 180°$$
$$B' = -B$$

wo L und B die heliocentrische Länge und Breite des Saturn sind. Demnach wird:

1889	L'	B'	log D in Saturnbahnradien
Nov. 1.0	326° 35'.7	−1° 23'.3	9.98548
2.0	326 37.9	−1 23.4	9.98549

Nun denken wir uns die Ekliptik, den Frühlingspunkt Υ und bezeichnen mit Ω den aufsteigenden Knoten des Saturnringes in der Ekliptik, mit φ seine Länge. Dann ziehen wir von der Sonne zwei grösste Kreise senkrecht zur Ekliptik und Ringebene. Das Stück »Sonne–Ring« ist dann der Elevationswinkel α der Sonne über der Ringebene. Das Stück »Abstand der Sonne von der Ekliptik« ist $B' = -B$, wenn B die heliocentrische Breite des Saturn. Man hat somit folgende Figur:



Aus dieser Figur ergeben sich zur Berechnung von ν und α aus $(L' - \varphi)$, ϑ und B' folgende Formeln: *)

$$\left.\begin{aligned} M \sin N' &= \sin B' \\ M \cos N' &= \cos B' \sin (L' - \varphi) \\ \cos \alpha \cos \nu &= \cos B' \cos (L' - \varphi) \\ \cos \alpha \sin \nu &= M \cos (N' - \vartheta) \\ \sin \alpha &= M \sin (N' - \vartheta) \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Und zur Controle derselben:

$$\frac{\cos (N' - \vartheta)}{\cos N'} = \frac{\cos \alpha \sin \nu}{\cos B' \sin (L' - \varphi)}$$

wo N' der Hülfswinkel ist, welchen der, Ω mit der Sonne verbindende, grösste Kreis mit der Ekliptik bildet, und M der Sinus dieses Bogens des grössten Kreises. Zur durchgreifenderen Controlirung verfügt man noch über folgendes System: †)

$$\left.\begin{aligned} \sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \tfrac{1}{2}(E' - \nu) &= \cos\left(45° + \frac{L' - \varphi}{2}\right) \sin\left(45° - \frac{\vartheta + B'}{2}\right) \\ \sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) \cos \tfrac{1}{2}(E' - \nu) &= \sin\left(45° + \frac{L' - \varphi}{2}\right) \cos\left(45° - \frac{\vartheta - B'}{2}\right) \\ \cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \tfrac{1}{2}(E' + \nu) &= \sin\left(45° + \frac{L' - \varphi}{2}\right) \sin\left(45° - \frac{\vartheta - B'}{2}\right) \\ \cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) \cos \tfrac{1}{2}(E' + \nu) &= \cos\left(45° + \frac{L' - \varphi}{2}\right) \cos\left(45° - \frac{\vartheta + B'}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

wo $90 - E'$ der Winkel ist, welchen die in der Figur mit α und B' bezeichneten Bogen an der Sonne mit einander bilden. Und schliesslich ergiebt die Figur nachfolgendes System:

$$\left.\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} N \sin \tfrac{1}{2}(S + \Omega K) &= \sin \tfrac{1}{2}(n - \varphi) \sin \frac{i + \vartheta}{2} \\ \sin \tfrac{1}{2} N \cos \tfrac{1}{2}(S + \Omega K) &= \cos \tfrac{1}{2}(n - \varphi) \sin \frac{i - \vartheta}{2} \\ \cos \tfrac{1}{2} N \sin \tfrac{1}{2}(S - \Omega K) &= -\sin \tfrac{1}{2}(n - \varphi) \cos \frac{i + \vartheta}{2} \\ \cos \tfrac{1}{2} N \cos \tfrac{1}{2}(S - \Omega K) &= \cos \tfrac{1}{2}(n - \varphi) \cos \frac{i - \vartheta}{2} \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

*) cf. Brünnow 4. Auflage S. 87. †) cf. Brünnow 4. Auflage S. 88.

Ferner:

$$\left.\begin{aligned} \sin N \sin S &= \sin(n-\varphi)\sin\vartheta \\ \sin N \sin(\Omega K) &= \sin(n-\varphi)\sin i \\ \sin N \cos S &= \cos\vartheta \sin i - \sin\vartheta \cos i \cos(n-\varphi) \\ \sin N \cos(\Omega K) &= -\cos i \sin\vartheta + \sin i \cos\vartheta \cos(n-\varphi) \\ \cos N &= \sin\vartheta \sin i \cos(n-\varphi) + \cos\vartheta \cos i \end{aligned}\right\} (26)$$

Nach der Figur ist weiter:

$$k = \Omega K - v \qquad (27)$$

also k, N und S bekannte Grössen. Schliesslich ergiebt die Figur noch:

$$u = v + \varphi' - S \qquad (28)$$

Wir bezeichnen nun mit $x\,y\,z$ die rechtwinkligen Coordinaten des Iapetus, bezogen auf die Ringebene und gerechnet vom Saturncentrum aus, und zwar so, dass die x-Axe die Projection der Linie »Sonne–Saturn« auf die $x\,y$-Ebene, d. h. Ringebene ist. Man sieht, dass unter diesen Annahmen die positive x-Axe vom Saturn aus gesehen die Himmelskugel im Punkt x schneidet (cf. Figur). Es ergeben sich dann, wenn wir mit (r) den Radiusvector, d. h. den Abstand »Iapetus–Saturn«, zum Unterschied vom Ringradius r im Ringschattenproblem bezeichnen, nach unserer Figur durch Projection die folgenden Relationen, indem man nämlich den Radiusvector (r) zunächst in der Bahnebene auf die Knotenlinie k, dann senkrecht zur Knotenlinie in der Bahnebene projicirt, und hierauf wieder diese zwei Projectionen auf die Ringebene und senkrecht dazu projicirt:

$$\left.\begin{aligned} x &= (r)\cos u \cos k - (r)\sin u \cos N \sin k \\ y &= (r)\cos u \sin k + (r)\sin u \cos N \cos k \\ z &= (r)\sin u \sin N \end{aligned}\right\} (29)$$

Nun setzen wir:

$$\begin{aligned} \cos k &= p\cos P \\ \cos N \sin k &= p \sin P \\ \sin k &= q \sin Q \\ \cos N \cos k &= q \cos Q \end{aligned}$$

Dann werden die Coordinaten:

$$\left.\begin{aligned} x &= (r)\,p\cos(u+P) \\ y &= (r)\,q\sin(u+Q) \\ z &= (r)\sin u \sin N \end{aligned}\right\} (30)$$

Für L', B' und D, die man während der Barnard'schen Beobachtungen, wie man sich leicht überzeugt, als constant betrachten kann, legen wir folgende Werthe zu Grunde:

$$\begin{aligned} L' &= 326^\circ 37'.9 \\ B' &= -1\ 23.4 \\ D &= 9.98549 \end{aligned}$$

Indem wir unter dieser Voraussetzung System (23) lösen, ergiebt sich für:

$$\begin{aligned} v &= 161^\circ 33'.6 \\ \alpha &= -11\ 10.1 \end{aligned}$$

welche Werthe adoptirt sind.

Das Controlsystem (24) giebt:

$$\begin{aligned} v &= 161^\circ 33'.7 \\ \alpha &= -11\ 10.2 \end{aligned}$$

Das System (26) giebt:

$$\begin{aligned} N &= 13^\circ 55'.1 \\ S &= 239\ 11.9 \\ \Omega K &= 215\ 12.9 \end{aligned}$$

welche Werthe adoptirt sind.

Das Controlsystem (25) giebt:

$$\begin{aligned} N &= 13^\circ 55'.2 \\ S &= 239\ 11.8 \\ \Omega K &= 215\ 13.0 \end{aligned}$$

Es folgt hieraus:

$$\begin{aligned} k &= \Omega K - v = 53^\circ 39'.3 \\ \lg p &= 9.99170 \\ \lg q &= 9.99554 \\ P &= 52^\circ 50'.2 \\ Q &= 54\ 28.0 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich als rechtwinklige Coordinaten des Iapetus bezogen auf unser System numerisch:

$$\begin{aligned} x &= (r)\,[9.99170]\cos(u+52^\circ 50'.2) \\ y &= (r)\,[9.99554]\sin(u+54\ 28.9) \\ z &= (r)\,[9.38121]\sin u \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} u &= v + \varphi' - S \\ u &= v - 27^\circ 27'.9 \end{aligned}$$

Führen wir jetzt statt u die wahre Anomalie v ein, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} x &= (r)\,[9.99170]\cos(v+25^\circ 22'.3) \\ y &= (r)\,[9.99554]\sin(v+27\ \ 0.1) \\ z &= (r)\,[9.38121]\sin(v-27\ 27.9) \end{aligned}\right\} (31)$$

Man sieht weiter, dass die rechtwinkligen x- und y-Coordinaten der Sonne, A und C, die folgenden Werthe haben:

$$\begin{aligned} A &= D\cos\alpha \\ C &= D\sin\alpha \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} \lg A &= 9.97719 \\ \lg C &= 9.27260_n \end{aligned}$$

An dieser Stelle wollen wir gleich die zur Berechnung von (r) und v anzuwendenden bekannten Hülfsformeln numerisch für unser Problem geben:

$$\sqrt{(r)}\sin{}^1/_2\, v = [1.36185]\sin{}^1/_2\,\psi$$
$$\sqrt{(r)}\cos{}^1/_2\, v = [1.34944]\cos{}^1/_2\,\psi$$
$$(r)\sin v = [2.71129]\sin\psi$$
$$(r)\cos v = [2.71146]\cos\psi - [1.16752]$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur Behandlung des Ellipsoidschattenproblems über. Zunächst formen wir dazu unsere früher abgeleitete Ellipsoidschattengleichung (2), wie dort schon erwähnt, in brauchbarer Weise für die Rechnung um. Wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} X' &= \varrho\cos\beta\cos\lambda \\ Y' &= \varrho\cos\beta\sin\lambda \\ Z' &= \varrho\sin\beta \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Es sind dann offenbar $\varrho\ \beta\ \lambda$ die Coordinaten eines Punktes der Schattenfläche, bezogen auf unser Coordinatensystem. Von der Sonne aus gesehen schneidet aber die Schattenfläche ein sehr kleines Stück des Himmels, nämlich einen Kreis mit ca. 8″ Radius aus. Man wird daher setzen dürfen:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= -\alpha + \Delta\beta \\ \lambda &= +\Delta\lambda \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

wobei $\Delta\beta$ und $\Delta\lambda$ als sehr kleine Winkel zu betrachten, indem nämlich für das Saturncentrum

$$\beta = -\alpha \quad \text{und} \quad \lambda = 0$$

ist. Unsere Schattengleichung wird jetzt:

$$0 = \frac{a^2}{R'^2}[A\,Z' + C\,X']^2 - a^2\left[X'^2 + Z'^2\cdot\frac{a^2}{R'^2}\right] + Y'^2\left[A^2 + \frac{a^2}{R'^2}C^2 - a^2\right]$$

Durch Substitution der Ausdrücke aus (32) und (33), wobei ϱ herausfällt, und indem man hierauf, sich auf zweite Potenzen beschränkend:

$$\cos\lambda = 1 - {}^1/_2\,\Delta\lambda^2$$
$$\sin\lambda = \Delta\lambda$$

setzt, wird die Schattengleichung:

$$0 = \frac{a^2}{R'^2}D^2\left[\cos^2\beta + \sin^2\beta\,\frac{a^2}{R'^2}\right] + D^2\cos^2\beta\,\Delta\lambda^2\left[\cos^2\alpha + \frac{a^2}{R'^2}\sin^2\alpha\right]$$

Unter Vernachlässigung von Gliedern dritter Ordnung folgt schliesslich:

$$0 = \frac{a^2}{R'^2}\Delta\beta^2 - \frac{a^2}{R'^2\,D^2}\cdot[R'^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta] + \frac{\cos^2\beta\,\Delta\lambda^2}{R'^2}[R'^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha]$$

In dieser Gleichung ist $\frac{a^2}{R'^2}$ nahezu vom Range 1. Halten wir das fest, so ist das zweite Glied vom Range $\frac{R'^2}{D^2}$ resp. $\frac{a^2}{D^2}$ multiplicirt mit $\cos^2\beta$ resp. $\sin^2\beta$, d. h. es liegen Producte von Grössen zweiter Ordnung in den Cosinus resp. Sinus endlicher Winkel vor. Man wird daher im zweiten Glied $\beta = -\alpha$ setzen können und erhält schliesslich als Resultat:

$$1 = \frac{\Delta\beta^2}{\dfrac{R'^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}{D^2}} + \frac{\Delta\lambda^2\cos^2\alpha}{\dfrac{a^2}{D^2}} \quad (34)$$

die Gleichung der Schattenfläche in heliocentrischen Polarcoordinaten.

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichung (34) liegt auf der Hand. Die Schattenfläche stellt sich von der Sonne aus gesehen dar als eine kleine Ellipse auf der Himmelskugel, deren Halbaxen bezüglich

$$\frac{a}{D} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{a^2\sin^2\alpha + R'^2\cos^2\alpha}}{D}$$

sind, indem nämlich $\Delta\beta$ dem y und $\Delta\lambda\cos\alpha$ dem x entspricht. Die Multiplication von $\Delta\lambda$ mit $\cos\alpha$ kommt dabei daher, dass $\Delta\lambda$ in der Fundamentalebene gezählt wird, also $\Delta\lambda\cos\alpha$ am Himmel.

Nun wurde die Lage des Iapetus gegen das Saturncentrum durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bestimmt, wobei die xy-Ebene gleich der Ringebene war, und die xz-Ebene durch die Sonne ging. Um jetzt $\Delta\lambda\cos\alpha$ und $\Delta\beta$ als Functionen von x, y, z darzustellen, denken wir uns ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem eingeführt, welches seinen Ursprung in der Sonne hat, dessen xy-Ebene der Ringebene parallel ist, und dessen xz-Ebene durch den Saturn geht. Demgemäss sind die Axen dieses Systems den Richtungen $x\,y\,z$ parallel, jedoch erscheint das ganze System x, y, z gegen unser neues System um 180° um die z-Axe gedreht. Die Coordinate eines Punktes der Schattenfläche, bezogen auf unser neues rechtwinkliges System, ist also allgemein gleich der Coordinate des Saturncentrums plus der entsprechenden Coordinate des Iapetus, bezogen auf unser neues System. Man hat demnach:

$$\varrho\cos\beta\cos\lambda = D\cos\alpha - x$$
$$\varrho\cos\beta\sin\lambda = -y$$
$$\varrho\sin\beta = -D\sin\alpha + z$$

wobei ϱ die Distanz eines Punktes der Schattenfläche vom Saturncentrum, β seine Breite und λ seine Länge ist. Da aber

$$\beta = -\alpha + \Delta\beta$$
$$\lambda = \Delta\lambda$$

so gehen die drei letzten Relationen, wenn man gleich Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt, über in die folgenden:

$$\Delta\lambda = -\frac{y}{D\cos\alpha} \qquad (35)$$

$$\Delta\beta = \frac{1}{D}[z\cos\alpha - x\sin\alpha] \qquad (36)$$

$$\varrho = D - x\cos\alpha - z\sin\alpha \qquad (37)$$

Durch Substitution ferner der Werthe aus (35) und (36) in Gleichung (34) findet man:

$$1 = \frac{y^2}{a^2} + \frac{(z\cos\alpha - x\sin\alpha)^2}{R'^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}$$

Wenn wir daher setzen:

$$b = \sqrt{R'^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}$$

so folgt als Gleichung der Schattenfläche, in dem neu definirten Sinne:

$$1 = \frac{y^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}[z\cos\alpha - x\sin\alpha]^2 \qquad (38)$$

Im Folgenden führen wir die Abkürzung

$$z\cos\alpha - x\sin\alpha = \mathfrak{Rl}$$

ein. Indem wir jetzt schliesslich noch diese Klammer durch den Radiusvector (r), die wahre Anomalie v und durch numerische Constante ausdrücken, wobei wir die früher abgeleiteten Relationen (29) benutzen und hierauf setzen:

$$g\cos G = \cos K\sin\alpha$$
$$g\sin G = \cos N\sin K\sin\alpha + \sin N\cos\alpha$$

so findet man als endgültige, der numerischen Rechnung zu Grunde zu legende Form der Schattengleichung des Saturnellipsoids:

$$1 = \frac{y^2}{a^2} + \left[\frac{-(r)g\cos(v+\varphi'-S+G)}{b}\right]^2 \qquad (39)$$

wobei in unserem Fall:

$$g = [9.15403]$$
$$G = 143^\circ\,37'.6$$

weshalb man mit folgenden Formen zu rechnen hat:

$$y = (r)[9.99554]\sin(v + 27^\circ\ 0'.1)$$
$$\mathfrak{Rl} = (r)[9.15403]\cos(v - 63^\circ\,50'.3)$$

An dieser Stelle wollen wir die Hülfstafel geben, welche die Sternzeit des Lick-Observatoriums in mittlere Greenwicher Zeit minus Lichtzeit verwandelt, aus der sich dann unmittelbar diejenige mittlere Greenwicher Zeit ergiebt, welche bei Berechnung der geometrischen Verhältnisse zu Grunde gelegt werden muss. In unserem Fall darf nämlich die Aberrationszeit keineswegs vernachlässigt werden, da das Licht $1^h\,19^m.4$ brauchte, um vom Saturn bis zur Erde zu gelangen, als Barnard beobachtete.

Hülfstafel.

Sternz. Mt. H.	M. Z. Gr.	M. Z. Gr. — Ab.-Zt.
$5^h\ 0^m$	$22^h\,19^m.1$	$20^h\,59^m.7$
6 0	23 18.9	21 59.5
7 0	24 18.7	22 59.3
8 0	25 18.6	23 59.2

Wie in der Einleitung bereits mitgetheilt, sah nun Barnard den Satelliten schwach um $5^h\,24^m.5$ Lick-Sternzeit, und im Maximum der Helligkeit um $5^h\,35^m.0$. Wir nehmen jetzt an, dass sich der Iapetus zu diesen Zeiten in der Kern- und Halbschattenfläche befindet. Verwandeln wir nun diese beiden Zeitmomente mittelst unserer Hülfstafel in mittlere Greenwicher Zeit minus Lichtzeit und drücken sie in Bruchtheilen des Tages aus, so ergiebt sich:

	Nov.
Kernschatten	1.89174
Halbschatten	1.89903
Mittel	1.89539

Nun ist aber, abgesehen von der Schwierigkeit, mit den genauen Gleichungen der Schattenflächen zu rechnen, noch der Umstand hervorzuheben, dass der Uebergang von dem Kernschatten in den Halbschatten und von da in das volle Licht, nur ganz allmählig erfolgt, weshalb man im Einzelnen gar nicht genau anzugeben im Stande ist, auf welche Momente sich die Beobachtung erstreckt. Im Folgenden nehmen wir daher an, dass das Mittel aus den beiden Zeiten demjenigen Moment entspricht, wo sich der Trabant in der Kegelfläche befindet, welche wir vom Sonnenmittelpunkt an den Saturn gelegt haben, und welche durch unsere Gleichung (39) definirt wurde. Diese Gleichung wollen wir jetzt zweimal auflösen, indem wir für die Halbaxen des Saturnellipsoids einmal die Fadenmikrometerwerthe und einmal die Heliometerwerthe zu Grunde legen. So erhält man:

I. Fadenmikrometer.

$$a = 8''.845$$
$$R' = 8.160$$

Gleichung (39) wird:

$$1 = \frac{y^2}{[1.89340]} + \frac{\mathfrak{Rl}^2}{[1.82622]}$$

Diese Gleichung lässt sich im vorliegenden Falle sehr leicht behandeln, da das zweite Glied im Verhältniss zum ersten ausserordentlich klein ist, geometrisch: der Iapetus tritt von der Sonne aus gesehen fast genau am Ende der grossen Halbaxe der Ellipse aus. Demgemäss erhält man für v eine sehr brauchbare Näherung, wenn man $y = a$ setzt. Auf diese Weise folgt:

$$v = 153^\circ\,58'.1$$

und man überzeugt sich durch Einsetzen dieses Werthes in obige Gleichung, dass die Rechnung sofort bei diesem v-Werth stehen bleibt. Das Struve'sche v für diesen Zeitmoment ist:

$$v = 153^\circ 55'.5$$

so dass die an Struve nach Barnard anzubringende Correction:

$$+2'.6$$

beträgt.

II. Heliometer.

$$a = 8''.655$$
$$R' = 7.685$$
$$1 = \frac{y^2}{[1.87454]} + \frac{\mathfrak{N}l^2}{[1.77563]}$$

Die Rechnung bleibt wieder sogleich bei demjenigen Werthe von v stehen:

$$v = 153^\circ 56'.9$$

den man erhält, wenn man $y = a$ setzt. Daraus ergiebt sich für das Struve'sche v eine Correction von:

$$+1'.4$$

Da aber Heliometerwerthe auf weniger Beobachtungen beruhen, so gab ich ihrem Resultat gegenüber demjenigen der Fadenmikrometer das Gewicht $1/4$ und erhalte so als endgültigen Werth:

$$v = 153^\circ 57'.7$$

Mithin als Correction für Struve:

$$+2'.2$$

Als mittlere Anomalie 1889 Nov. 1.0 ergiebt sich somit nach Barnard:

$$\mu = 148^\circ 26'.0$$

d. h. als Correction für die Struve'sche mittlere Anomalie:

$$+2'.3.$$

Nachdem wir so die mittlere Anomalie für 1889 Nov. 1.0 mittelst der Barnard'schen Beobachtungen neu berechnet haben, gehen wir zur Discussion der Barnard'schen Ringschattenbeobachtungen über. Zunächst wollen wir mit Hülfe unserer früher aufgestellten Ringschattengleichung den Ringradius r als Function der als bekannt betrachteten Sonnen- und Iapetuscoordinaten darstellen. Dann erscheinen für r zwei Werthe, welche die Grenzen darstellen, zwischen denen beschattende Theilchen liegen. Denn in unserer Ringschattengleichung stecken in Form des Doppelvorzeichens zwei Gleichungen, die Kern- bez. Halbschattengleichung. Wenn wir also diese Gleichung quadriren und bei gegebenen Werthen von $x\ y\ z$ nach r auflösen, so erhalten wir für r zwei Werthe, von denen der eine der durch $x\ y\ z$ hindurchgehenden Ringschattenfläche, der andere der durch $x\ y\ z$ hindurchgehenden Ringhalbschattenfläche entspricht. Demgemäss sind r_1 und r_2 die äussersten Grenzen auf dem Ringe, innerhalb deren beschattende Theilchen liegen können.

Vorerst treffen wir wieder die zur Behandlung dieses Problems nöthigen Vorbereitungen. In unsere Ringschattengleichung führen wir die neue Variable R ein, die bestimmt ist durch die Gleichung:

$$R = r^2\left(\frac{C-z}{C}\right)^2 - y^2$$

ferner wie früher:

$$x - \frac{A}{C}z = \xi$$

Durch diese Substitution geht die Ringschattengleichung nach mehrfachen Umformungen schliesslich über in:

$$r\left(1 - \frac{z}{C}\right) = \sqrt{\xi^2 + 2\left(\frac{\lambda^2}{\sin^2\alpha}\right)z^2 + y^2 \pm \left(\frac{2\lambda}{\sin\alpha}\right)z\sqrt{\xi^2 + \frac{\lambda^2 z^2}{\sin^2\alpha} + y^2\sin^2\alpha}} \qquad (40)$$

womit r als Function der Coordinaten dargestellt. Das ist der erste Schritt für die, unsere Aufgabe vollständig lösende Ephemeride. Dieser legen wir die Schattengleichung in der Form (40) zu Grunde.

Zunächst findet man:

$$\xi = x - z\operatorname{ctg}\alpha = x + z\,[0.70458]$$
$$\lambda = \frac{\varrho}{C} = [7.41630_n - 10]$$
$$\sin\alpha = 9.28711_n$$

Die Berechnung der Grösse ξ nach der Formel:

$$\xi = x - z\operatorname{ctg}\alpha$$

bietet indess in unserem Falle Schwierigkeiten, da ξ sehr klein wird. Daher sah ich mich veranlasst, ξ direct als Function von v darzustellen. So findet man schliesslich, wenn man in obiger Relation x und z als Functionen von v einsetzt, mit Hülfe der Relationen:

$$f\cos F = \cos K$$
$$f\sin F = \cos N\sin K + \sin N\operatorname{ctg}\alpha$$

als Resultat der Rechnung:

$$\xi = (r)\cdot 9.86691\cos(v - 63^\circ 50'.2).$$

Um nun die Barnard'schen Beobachtungen zu verificiren, habe ich für eine gewisse Anzahl Zeitmomente r_1 und r_2 und deren arithmetisches Mittel $1/2\,(r_1 + r_2)$ in Form einer Ephemeride berechnet. Wenn dann an irgend einer Stelle die Barnard'sche Lichtcurve ein besonderes Verhalten zeigt, so entnehmen wir unserer Ephemeride $1/2\,(r_1 + r_2)$ für diesen Moment und sehen demnach, ob sich in dieser Entfernung vom Saturncentrum ein Theil des Ringes befindet, welcher wirklich eine besondere ausgezeichnete Eigenschaft besitzt. Diese ursprüngliche Ephemeride giebt r_1, r_2 und $1/2\,(r_1 + r_2)$ in Bogensecunden und Kilometern, von je 30^m zu 30^m Sternzeit Mt. H. Da sich aber bei Bildung der Differenzen die zweiten Differenzen noch etwas fühlbar machten, so interpolirte ich auf die Mitte und erhielt so eine Ephemeride von 15^m zu 15^m, welche r_1, r_2 und $1/2\,(r_1 + r_2)$ in Bogensecunden und Kilometern gab.

Stz. Mt. H.	r_1	r_2	$\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$
$5^h\ 0^m$	8″57	7″87	8″22
5 15	8.96	8.26	8.61
5 30	9.38	8.66	9.02
5 45	9.81	9.07	9.44
6 0	10.25	9.49	9.87
6 15	10.71	9.92	10.31
6 30	11.17	10.36	10.76
6 45	11.64	10.80	11.22
7 0	12.11	11.25	11.68
7 15	12.59	11.70	12.14
7 30	13.07	12.15	12.61
7 45	13.55	12.60	13.08
8 0	14.02	13.05	13.54

Das ist die interpolirte Ephemeride, die ursprünglich Tausendstel Bogensecunden zeigte und die wir hier — im Sinne der Genauigkeit der Barnard'schen Beobachtungen — gleich abgekürzt auf Hundertstel Secunden angeben. Ebenso fügen wir sie gleich noch in Hunderten von Kilometern bei Dabei sei bemerkt, dass bei Verwandlung der Bogensecunden in Kilometer die Sonnenparallaxe mit Newcomb zu 8″848 angenommen wurde. Demgemäss hat man zu den Logarithmen der Ringradien in Bogensecunden die Grösse [3.83728] zu addiren. Bei Längeneinheit 100 km folgt:

Stz. Mt. H.	r_1	r_2	$\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$
$5^h\ 0^m$	589	541	565
5 15	616	568	592
5 30	645	596	620
5 45	674	624	649
6 0	705	653	679
6 15	736	682	709
6 30	768	712	740
6 45	800	743	771
7 0	833	773	803
7 15	866	804	835
7 30	899	835	867
7 45	931	866	899
8 0	964	897	931

Nun gehen wir dazu über, diese Ephemeride mit den Barnard'schen Beobachtungen zu vergleichen. Zunächst ist im Auge zu behalten, dass r_1″ und r_2″ zu Anfang der Ephemeride um 0″7 von einander abweichen, zum Schluss der Ephemeride sogar um eine ganze Bogensecunde. Daraus folgt mit Nothwendigkeit eine gewisse Unbestimmtheit in der Aufgabe, indem gleichzeitig immer ein Streifen von ca. 1″ zur Beschattung des Japetus beiträgt, also ein ziemlich breiter Streifen des Ringes. Immerhin müssen aber die Haupteigenthümlichkeiten der Vertheilung der Ringmaterie in der Barnard'schen Lichtcurve zur Geltung kommen. Diesen Umstand kann man dazu benutzen, um die Barnard'schen Beobachtungen und die Ephemeride bei Heranziehung anderer Angaben über den Bau des Saturnringes durch gegenseitige Vergleichung zu prüfen. Andererseits aber kann man, indem man die Barnard'schen Beobachtungen und die Ephemeride als streng richtig betrachtet, aus beiden zusammen Schlüsse auf den Bau des Saturnrings ziehen; man kann z. B. neue Werthe für die Durchmesser der verschiedenen Theile des Ringes ableiten.

In dem Augenblick, wo Iapetus den Ellipsoidschatten verlässt, muss $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ angenähert den Werth des Aequatorealhalbmessers des Saturn haben, weil Iapetus von der Sonne aus gesehen sehr nahe am Ende dieses Halbmessers austritt. Um $5^h 24^m 5$ Sternzeit wurde der Satellit schwach gesehen. Für diesen Zeitmoment ist nach unserer Ephemeride: $\frac{1}{2}(r_1 + r_2) = 8″87$

während Oudemans für den Aequatorealhalbmesser des Saturn aus Fadenmikrometerbeobachtungen 8″85 findet. Das Helligkeitsmaximum fand nach Barnard um $5^h 35^m$ Sternzeit statt, hier verliess also Iapetus den Saturnschatten selbst und trat in den Schattenbereich des dunkeln Ringes ein. Hierauf glaubte Barnard eine langsame Lichtabnahme bis $6^h 15^m$ [$\frac{1}{2}(r_1 + r_2) = 10″31$] wahrzunehmen. Dies würde darauf hindeuten, dass sich der dunkle Ring bis unmittelbar an den Saturn hin erstreckt, und zwar würde seine Dichte vom Centralkörper bis zum Abstande 10″31 zunehmen.

Von da ab bis $6^h 35^m$ [$\frac{1}{2}(r_1 + r_2) = 10″91$] schien die Helligkeit des Iapetus sich gleich zu bleiben, oder doch nur unmerklich abzunehmen (cf. immer die Barnard'sche Helligkeitscurve). Demnach würde innerhalb der Grenzen 10″31 und 10″91 ein weiterer Theil des dunkeln Ringes von ungefähr constanter Dichtigkeit liegen. Von da ab begann eine ausgesprochene Lichtabnahme des Iapetus in Folge der Beschattung desselben durch den dunkeln Ring. Nach Oudemans beträgt der Halbmesser des innern Randes des dunkeln Ringes 10″88 (Fadenmikr.). Aus den Barnard'schen Beobachtungen aber ergiebt sich für dieselbe Grösse 10″91, wenn wir, da der dunkle Ring ein ziemlich diffuses Gebilde ist, als Radius $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ zu Grunde legen.

Die von $6^h 35^m$ ab beginnende Lichtabnahme setzte sich nun fort bis $7^h 59^m$, wo der Satellit im Schatten des hellen Ringes völlig verschwand. Demnach nimmt die Dichte des dunkeln Ringes von innen nach aussen immer mehr zu, bis er in den hellen Ring übergeht.

Von $7^h 45^m$ St. Mt. H. an jedoch beginnt die Lichtcurve schneller zu fallen. Demnach ist der Uebergang aus dem dunkeln Ring in den innern hellen ein sprungweiser, d. h. die Dichte der Ringmaterie nimmt plötzlich ausserordentlich stark zu.

Nach Oudemans beträgt der innere Halbmesser des hellen Ringes 13″00 (Fadenmikr.). Durch Vergleichung mit unserer Ephemeride überzeugt man sich aber, dass für

$7^h 45^m$ gerade $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$

für $7^h 59^m$ hingegen r_2

nahezu den Werth 13″00 hat. Es liegt daher die Annahme nahe, dass der Zeitmoment $7^h 45^m$ nicht dem Halbschatten r_1 entspricht, sondern etwa $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, d. h. eine dem Auge sichtbare Lichtabnahme würde erst dann stattfinden, wenn sich der Trabant ungefähr in der Mitte zwischen Halb- und Kernschatten befindet. Für $7^h 59^m$ hat r_2 den Werth 13″02. Daher folgere ich aus den Barnard'schen Beobachtungen die folgenden Ringdurchmesser:

I) Innerer Durchmesser des dunkeln Ringes 21″82
II) Innerer Durchmesser des hellen Ringes 26″04

Es besteht somit zwischen den Barnard'schen Beobachtungen und unserer Ephemeride eine vorzügliche Uebereinstimmung, so dass man dieselben auch zu weiteren Schlüssen über die Constitution des Saturnringes verwenden kann. Auf Grund der von uns gewonnenen Resultate ist nämlich auch die von uns zu Anfang der Abhandlung erwähnte Grösse λ aus der Saturntheorie Prof. Seeliger's jetzt leicht zu berechnen. Dabei nehmen wir mit Prof. Seeliger an, dass sich λ berechnen lässt nach der Formel:

$$\lambda = 0.917\,(m - m_0)$$

wo $(m - m_0)$ die Lichtabnahme des beschatteten Objectes ist, ausgedrückt in Grössenclassen.*) Nimmt man ferner mit Pickering an, dass der von Barnard zu Grunde gelegte Helligkeitsunterschied zwischen Enceladus und Tethys eine Grössenclasse beträgt, so kann man aus der Barnard'schen Zeichnung unmittelbar die Lichtschwächung in Grössenclassen ablesen. Zu diesem Zwecke wird man für die ursprüngliche Helligkeit des Iapetus das Helligkeitsmaximum der Barnard'schen Lichtcurve zu Grunde legen. Man entnimmt derselben, dass Iapetus im Maximum seiner Helligkeit um $0^m.88$ von Enceladus abstand und braucht also nur von diesem Werthe die gewissen anderen Zeitmomenten entsprechenden Werthe zu subtrahiren, um für die verschiedenen Theile des dunkeln Ringes $(m - m_0)$ zu finden. Dabei habe ich λ auch für denjenigen Theil des Saturnringes berechnet, welcher innerhalb des dunkeln Ringes liegt, lasse es aber dahingestellt, ob die hier von Barnard beobachtete Lichtabnahme auf Beobachtungsfehlern oder auf wirklicher Absorption durch innerhalb des dunkeln Ringas liegende Theilchen beruht. Ferner gebe ich noch:

$$\lambda_1 = \lambda \sin \alpha$$

wo α der Elevationswinkel der Sonne über dem Saturnring ist.

Schon oben haben wir darauf hingewiesen, dass derjenige Ringradius, welcher in einem gegebenen Augenblick am meisten zur Beschattung des Iapetus beiträgt, gleich $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ zu setzen ist. Demgemäss bin ich von:

$$\frac{1}{2}(r_1 + r_2) = 9″.50$$

ausgegangen und habe von $\frac{1}{4}″$ zu $\frac{1}{4}″$ der Barnard'schen Zeichnung $(m - m_0)$ entlehnt bis zu:

$$\frac{1}{2}(r_1 + r_2) = 13″.25$$

Von da ab macht sich schon die Beschattung durch den hellen Ring geltend. Daher sah ich mich genöthigt, hier die Berechnung von λ und λ_1 abzubrechen. Beifolgendes Tableau giebt für gewisse Werthe von $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ die nach obiger Ephemeride folgenden Sternzeiten Mt. H., die Helligkeit Iapetus minus Enceladus in Grössenclassen nach der Barnard'schen Lichtcurve, ferner die Grösse $(m - m_0)$, die durch Subtraction der vorhergehenden Grösse von $0^m.88$ entsteht. Nun wurde zunächst gerechnet:

$$\lg \lambda = \lg (m - m_0) + 9.9624$$
$$\lg \lambda_1 = \lg \lambda + 9.2871$$

Diese Rechnung wurde vierstellig durchgeführt. Da man indessen d = Helligkeit Iap. — Enc. aus der Barnard'schen Lichtcurve höchstens bis auf $1/100^m$ entlehnen kann, gebe ich hier nur λ und λ_1 sowie ihre Logarithmen auf zwei Decimalen abgekürzt wieder:

$\frac{1}{2}(r_1+r_2)$	Stz. Mt. H.	Iap.—Enc. $= d$	$m-m_0$	λ	$\lg\lambda$	λ_1	$\lg\lambda_1$
9.50	$5^h47^m.1$	0.87	0.01	0.01	7.96	0.00	7.25
9.75	5 55.8	0.83	0.05	0.05	8.66	0 01	7.95
10.0	6 4.4	0.81	0.07	0.06	8.81	0.01	8.09
10.25	6 13.0	0.78	0.10	0.09	8.96	0.02	8.25
10.50	6 21.3	0.77	0.11	0.10	9.00	0.02	8.29
10.75	6 29.7	0.77	0.11	0.10	9.00	0.02	8.29
11.0	6 37.8	0.76	0.12	0.11	9.04	0.02	8.33
11.25	6 46.0	0.71	0.17	0.15	9.19	0.03	8.48
11.50	6 54.1	0.62	0.26	0.24	9.38	0.05	8.66
11.75	7 2.3	0.49	0.39	0.36	9.55	0.07	8.84
12.0	7 10.3	0.39	0.49	0.45	9.65	0.09	8.94
12.25	7 18.5	0.28	0.60	0.55	9.74	0.11	9.03
12.50	7 26.5	0.21	0.67	0.61	9.79	0.12	9.08
12.75	7 34.5	0.14	0.74	0.68	9.83	0.13	9.12
13.0	7 42.4	0.07	0.81	0.74	9.87	0.14	9.16
13.25	7 50.5	0.04	0.92	0.84	9.93	0.16	9.21

Betrachten wir das Resultat unserer Untersuchungen, so haben wir es wesentlich Herrn Barnard zu danken, dem es gelang, diese, wie bekannt, nur dies eine Mal geglückten und für die Geschichte des Saturnsystems gewissermaassen epochemachenden Beobachtungen anzustellen.

München 1894 Juli. *H. Buchholz.*

*) cf. »Ueber die Beleuchtung staubförmiger kosmischer Massen speciell des Saturnringes« von Prof. Seeliger, Seite 24.